

2. Racionális és irracionális számok.

Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán.

Közönséges és tizedes törtek. Halmazok számossága

Vázlat:

- I. Számhalmazok: természetes, egész, racionális, irracionális, valós számok, ezek zárttsága
- II. Műveletek a racionális számok halmazán
- III. Műveletek az irracionális számok halmazán
- IV. Műveleti tulajdonságok: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás
- V. Közönséges és tizedes törtek
- VI. Halmazok számossága: véges, végtelen (megszámlálhatóan, illetve nem megszámlálhatóan végtelen) halmazok
- VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Számhalmazok

DEFINÍCIÓ: A **természetes számok** halmaza ($\mathbb{N}$) a pozitív egész számokból és a 0-ból áll.

A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, azaz bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám. Ugyanakkor a kivonás és az osztás már nem végezhető el ezen a halmazon belül, ezek a műveletek „kimutatnak” a halmazból. Pl. $3 - x = 5$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: Az **egész számok** halmaza ($\mathbb{Z}$) a természetes számokból és azok ellentettjeiből áll.

Az egész számok halmaza az összeadáson és a szorzáson kívül a kivonásra nézve is zárt, ugyanakkor az osztás kimutathat a halmazból. Pl. $2x + 3 = 4$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: A **racionális számok** halmaza ($\mathbb{Q}$) azokból a számokból áll, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, azaz $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

A racionális számok halmaza mind a 4 alapl műveletre zárt (osztásra, ha az osztó nem 0), de itt is találunk olyan egyenletet, amelynek nincs megoldása ezen a halmazon. Pl.: $2x^2 - 3 = 0$.

DEFINÍCIÓ: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, **irracionális számoknak** ($\mathbb{Q}^*$) nevezzük.

TÉTEL: $\sqrt{2}$ irracionális szám.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítást indirekt módon végezzük, lényege, hogy a bizonyítandó állítás tagadásáról bebizonyítjuk, hogy az hamis. Ez azt jelenti, hogy a bizonyítandó állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

$$\text{Ekkor } \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2.$$

Az egyenlet jobb oldalán szereplő (a^2) szám prímtényezős felbontásában a 2 mindenféleképpen páros kitevőn (akár a nulladikon) szerepel, míg a bal oldalon levő szám ($2 \cdot b^2$) prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan (legkevesebb 1).

Ez azonban lehetetlen, hiszen a számelmélet alaptétele szerint egy pozitív egész számnak nincs két lényegesen különböző felbontása.

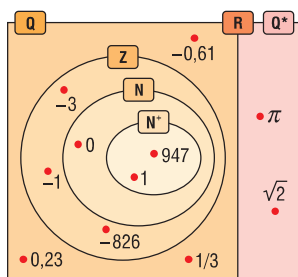
Tehát nem igaz az indirekt feltevésünk, vagyis igaz az eredeti állítás: $\sqrt{2}$ irracionális.

Tulajdonságok:

- Az irracionális számok halmaza nem zárt a 4 alpműveletre $(\sqrt{2} + (-\sqrt{2})) = 0 \notin \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2} : \sqrt{2} = 1 \notin \mathbb{Q}^*$. Tehát két irracionális szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa lehet racionális szám.
- Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

DEFINÍCIÓ: A racionális és az irracionális számok halmaza diszjunkt halmazok ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$), a két halmaz egyesítése a valós számok halmaza: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.

A valós számok halmaza zárt a 4 alpműveletre. A valós számok és részhalmazai:



II. Műveletek a racionális számok halmazán

Egy közös nevezőre hozott tört értéke nem, csak az alakja változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk (bővítés), vagy ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk (egyszerűsítés).

Ha a racionális számok közös nevezőre hozott alakúak, akkor a következő szabályokkal lehet elvégezni az alpműveleteket:

• Összeadás és kivonás:

Csak azonos nevezőjű törtet lehet összeadni, kivonni, ezért közös nevezőre hozzuk a törtet, vagyis a törtet bővítjük egy közös többszörösű nevezőre (legjobb, ha a legkisebb közös többszörösű nevezőre, mert így tudunk a legkisebb számokkal számolni):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}, \text{ ahol } b, d \neq 0.$$

Ha a nevezők (b és d) relatív prímek, akkor a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk.

• Szorzás:

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ ahol } b, d \neq 0.$$

Egész számmal úgy szorzunk törtet, hogy törtként írjuk fel a szorzót $\left(c = \frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a számlálót megszorozzuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

• Osztás:

Törtet törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót szorozzuk az osztó reciprokéval:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ ahol } b, c, d \neq 0.$$

Egész számmal úgy osztunk, hogy törtként írjuk fel az osztót $\left(c = \frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a nevezőt megszorozzuk, a számlálót változatlanul hagyjuk, vagy (egyszerűsíthető esetben) a számlálót osztjuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

III. Műveletek az irracionális számok halmazán

Az alpműveletek definiálhatók az irracionális számok körében úgy, hogy az eddigi azonosságok életben maradjanak. Mivel tizedes tört alakjuk végtelen, nem periodikus, így azt csak közelítően tudjuk megadni. Ezért a pontos értékeket pl. hatvány, gyök, logaritmus alakban adjuk meg, ilyenkor viszont a megfelelő műveleti szabályokkal dolgozunk.

IV. Műveleti tulajdonságok: $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

1. az összeadás és a szorzás kommutatív (felcserélhető)

$$a + b = b + a \quad \text{és} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. az összeadás és a szorzás asszociatív (csoportosítható)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{és} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. a szorzás az összeadásra nézve disztributív (szétagolható)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

V. Közöséges és tizedes törtek

A közöséges törtek formái lehetnek:

Az $\frac{a}{b}$ közöséges tört, vagyis az $\frac{a}{b}$ hányados a következő alakokban fordulhat elő ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, és a tört végsőig leegyszerűsített, azaz a és b legnagyobb közös osztója 1):

- egész szám, ha b osztója a -nak,
- véges tizedes tört, ha b prímtényezői felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül nincs más prímszám,
- végtelen szakaszos tizedes tört, ha b prímtényezői felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül más prímszám is van.

Összefoglalva:

A racionális számok a következő alakúak: közöséges törtek, egészek, véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek.

A tizedes törtek formái lehetnek:

- véges tizedes törtek, ezek felírhatók közöséges tört alakban. Pl. $2,3 = \frac{23}{10}$.
- végtelen tizedes törtek:
 - szakaszos tizedes törtek, ezek felírhatók közöséges tört alakban. Pl. végtelen mértani sor összegeként, vagy a következő módszerrel:

$$\begin{aligned} 2,354545\dots &= x \\ 235,454545\dots &= 100x. \end{aligned}$$

A két egyenletet kivonva egymásból

$$233,1 = 99x \Rightarrow x = \frac{233,1}{99} = \frac{2331}{990}$$

- nem szakaszos tizedes törtek **nem** írhatók át közöséges tört alakba.

Összefoglalva:

A közösleges törték mind felírhatók tizedes tört alakban (egész, véges, végtelen szakaszos tört alakban).

A nem szakaszos tizedes törték mind irracionális számok, tehát nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, tehát nem közösleges törték. Ebből következik, hogy nem minden tizedes tört közösleges tört.

VI. Halmazok számossága

DEFINÍCIÓ: Egy A **halmaz számossága** az A halmaz elemeinek számát jelenti. Jele: $|A|$. Egy halmaz számossága lehet véges vagy végtelen.

DEFINÍCIÓ: Egy halmaz **véges halmaz**, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk. Ellenkező esetben, azaz ha a halmaz elemeinek számát nem adhatjuk meg természetes számmal, akkor **végtelen halmazról** beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A végtelen halmazok között találhatunk olyat, melynek elemei sorba rendezhetők, tehát megadható az 1., 2., 3., 4., ... eleme. A pozitív természetes számokkal megegyező számosságú halmazokat **megszámálhatóan végtelen halmazoknak** nevezzük.

A megszámlálhatóság és a sorba rendezhetőség egy végtelen halmaznál ugyanazt jelenti.

Minden olyan halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, amelynek elemei és a természetes számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Megszámálhatóan végtelen számosságúak: Pl. egész számok, páros számok, négyzetszámok, racionális számok.

TÉTEL: Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen halmaz.

BIZONYÍTÁS: Írjuk fel az egész számokat rendezett sorrendben a következő módon: 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, Ezzel a rendezéssel minden egész számot felsoroltunk, egyértelműen meg tudjuk határozni a sorba rendezés n -edik elemét, így az egész számok halmazának számossága megegyezik a természetes számokéval, vagyis megszámlálhatóan végtelen halmaz.

TÉTEL: A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen halmaz.

BIZONYÍTÁS: A racionális számok $\frac{a}{b}$ alakúak, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Képezzük a következő táblázat szerint az a számlálóból és a b nevezőből álló racionális számokat:

$\frac{a}{b}$	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	...
+1	$\frac{0}{+1} = 0$	$\frac{+1}{+1} = +1$	$\frac{-1}{+1} = -1$	$\frac{+2}{+1} = +2$	$\frac{-2}{+1} = -2$	$\frac{+3}{+1} = +3$	$\frac{-3}{+1} = -3$	$\frac{+4}{+1} = +4$	$\frac{-4}{+1} = -4$	...
-1	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{+1}{-1} = -1$	$\frac{-1}{-1} = +1$	$\frac{+2}{-1} = -2$	$\frac{-2}{-1} = +2$	$\frac{+3}{-1} = -3$	$\frac{-3}{-1} = +3$	$\frac{+4}{-1} = -4$	$\frac{-4}{-1} = +4$	...
+2	$\frac{0}{+2} = 0$	$\frac{+1}{+2} = \frac{1}{2}$	$\frac{-1}{+2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{+2}{+2} = +1$	$\frac{-2}{+2} = -1$	$\frac{+3}{+2} = \frac{3}{2}$	$\frac{-3}{+2} = -\frac{3}{2}$	$\frac{+4}{+2} = +2$	$\frac{-4}{+2} = -2$	...
-2	$\frac{0}{-2} = 0$	$\frac{+1}{-2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$	$\frac{+2}{-2} = -1$	$\frac{-2}{-2} = +1$	$\frac{+3}{-2} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{+4}{-2} = -2$	$\frac{-4}{-2} = +2$	...
+3	$\frac{0}{+3} = 0$	$\frac{+1}{+3} = \frac{1}{3}$	$\frac{-1}{+3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{+2}{+3} = \frac{2}{3}$	$\frac{-2}{+3} = -\frac{2}{3}$	$\frac{+3}{+3} = +1$	$\frac{-3}{+3} = -1$	$\frac{+4}{+3} = \frac{4}{3}$	$\frac{-4}{+3} = -\frac{4}{3}$	...
-3	$\frac{0}{-3} = 0$	$\frac{+1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$	$\frac{+2}{-3} = -\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$	$\frac{+3}{-3} = -1$	$\frac{-3}{-3} = +1$	$\frac{+4}{-3} = -\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$	...
+4	$\frac{0}{+4} = 0$	$\frac{+1}{+4} = \frac{1}{4}$	$\frac{-1}{+4} = -\frac{1}{4}$	$\frac{+2}{+4} = \frac{1}{2}$	$\frac{-2}{+4} = -\frac{1}{2}$	$\frac{+3}{+4} = \frac{3}{4}$	$\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$	$\frac{+4}{+4} = +1$	$\frac{-4}{+4} = -1$	...
-4	$\frac{0}{-4} = 0$	$\frac{+1}{-4} = -\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$	$\frac{+2}{-4} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$	$\frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$	$\frac{+4}{-4} = -1$	$\frac{-4}{-4} = +1$	...
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

A képzés módszere szerint minden racionális számot felsoroltunk, némelyeket többször is. A piros vonal mentén sorba rendezzük a kapott számokat. A képzés módszere és a felfűzés sorrendje miatt minden racionális számot figyelembe vettünk, és sorba tudtuk rendezni őket. Így a racionális számok halmazának számossága egyenlő a természetes számok halmazának számosságával, vagyis megszámlálhatóan végtelen halmaz.

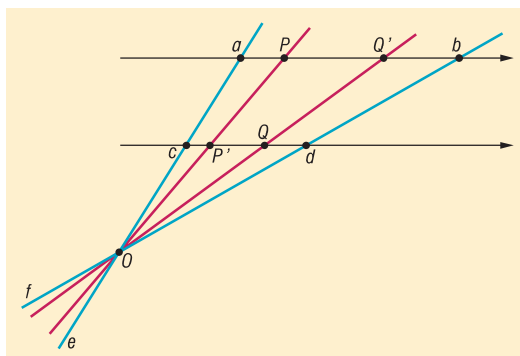
DEFINÍCIÓ: A valós számok számosságával megegyező számosságú halmazokat **nem megszámlálhatóan végtelen** vagy kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük. Pl.: irracionális számok halmaza, számegyenes pontjainak halmaza, intervallum pontjainak halmaza.

TÉTEL: Az $[a; b]$ és a $[c; d]$ intervallumok számossága megegyezik.

BIZONYÍTÁS: Bizonyítás: Ha $b - a = d - c$, akkor a két intervallum „hossza” egyenlő, így számosságuk is.

Ha $b - a \neq d - c$, akkor vegyünk fel párhuzamosan két azonos beosztású számegyeneset, ábrázoljuk az egyiket az egyik, a másikon a másik intervallumot. Húzzuk meg az a -t és c -t, valamint a b -t és d -t összekötő e és f egyeneseket. E két egyenes metszi egymást az O pontban. Az O pontból középpontos hasonlósági transzformációval $[a; b]$ intervallum képe $[c; d]$ intervallum.

Ha az $[a; b]$ intervallum egy pontja P , akkor P -t O -val összekötő egyenes P' pontban metszi a $[c; d]$ intervallumot. Ha a $[c; d]$ intervallum egy pontja Q , akkor Q -t O -val összekötő egyenes Q' pontban metszi az $[a; b]$ intervallumot. Így az $[a; b]$ és a $[c; d]$ intervallum minden pontja kölcsönösen megfeleltethető egymásnak, tehát ugyanannyi pontból állnak, azaz számosságuk egyenlő.



TÉTEL: Számosság és halmazműveletek kapcsolata (**logikai szita**): A , B és C véges halmazok számosságára érvényesek a következők:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

VII. Alkalmazások

- Racionális számok: arányok, arányosság, hasonlóság
- Irracionális számok: szabályos háromszög magassága $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, négyzet átlója $(a\sqrt{2})$, kör kerülete $(2r\pi)$, területe $(r^2\pi)$
- Kifejezések legbővebb értelmezési tartományának meghatározása, pl. $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$
- Függvény értékkészletének megállapítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az első **számírások** nem a mai írásjelekkel, hanem szimbólumokkal, jelekkel (pl. ékírás, római számok) történtek. A mai számírást a XI. században az arab **al-Hvázizmi** matematikus írta le először. Európába **Fibonacci** olasz matematikus a XII. században hozta be, de csak a XV–XVI. században terjedt el. Fibonacci nemcsak a 10 számjegyet, hanem a helyi értékes számírást is elhozta Európába. „*Van tíz hindu jel: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Ezen jelek segítségével bármilyen számot fel lehet írni, amit csak akarunk.*”
- A zérust jelentő szó először 100 körül jelent meg a hinduknál.
- Az irracionális számokat már **Pitagorasz** (Kr. e. 450 körül) is ismerte, ekkor a hinduk már ismerték a négyzet oldalának és átlójának viszonyát.
- A negatív számok viszonylag későn jelentek meg: az egyenletek megoldásakor kaptak olyan számokat, amelyeket először nem tudtak értelmezni. **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus fiktív számoknak nevezte őket, **Viète** (1540–1603) francia matematikus elvetette létezésüket.
- **Descartes** francia matematikus 1637-ben már minden előítélet nélkül használta az általa hamis számoknak nevezett negatív számokat.
- **Gauss** (1777–1855) német matematikus részletesen tárgyalta a komplex számok algebráját és aritmetikáját, ahol $\sqrt{-1} = i$.
- A halmazelmélet megteremtése **Cantor** (1845–1918) német matematikushoz fűződik. Kortársai többsége nem értette meg a végtelen halmazok számosságával kapcsolatos gondolatait: a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, számosságuk mégis egyenlő. Meghatározása szerint két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Hozzá fűződik a megszámlálható halmazok fogalma. A róla elnevezett Cantor-féle átlós eljárással bizonyította, hogy a valós számok nem megszámlálhatóak.