

1.5. Feladat. Egy számtani sorozat második eleme 12, hatodik eleme 44. Mennyi a sorozat differenciája?

1.6. Feladat. Mekkora a szabályos 24 oldalú sokszög szögei?

1.5. Feladat. Egy számtani sorozat második eleme 12, hatodik eleme 44. Mennyi a sorozat differenciája?

Megoldás. Szögezzük le, hogy ez egy számtani sorozat. A számtani sorozat egy olyan (rekurzív) sorozat, melynek a szabálya a következő: a második tagtól kezdve minden tag az előző tagtól ugyanannyival (**differenciával**) tér el. ($a_n = a_{n-1} + d$) vagy ($a_n = a_1 + (n-1)d$)
A feladat most nem kéri, de beszéljük meg az **első n tag összegét** is. Erre szintén két képlet van, melyek ugyanazt jelentik:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Térjünk rá a feladatra, s gyűjtsük ki az adatokat:

- $a_2 = 12$
- $a_6 = 44$
- $d = ?$

A megadott adatokkal írjunk fel egy összefüggést:

$$a_2 + 4d = a_6$$

Arra figyeljünk, hogy a bal oldalon a tag indexének (most 2) és a differencia együtthatójának (most 4) összege pontosan a jobb oldali tag indexe (most 6).

$$12 + 4d = 44$$

$$4d = 32$$

$$d = 8$$

Ha mértani sorozat lett volna, akkor mit kell csinálni?

Hasonlóan a számtanihoz, itt is lesz egy főszereplőnk, akit **kvóciensnek** vagy **hányadosnak** neveznek. A különbség az lesz, hogy most **szorozni** kell a kvócienssel a lépéshez.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

vagy

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Hiszen gondoljunk bele, ha az **első** tagról szeretnénk ellépni az **ötödik** tagra, akkor pontosan **négyet** kell lépünk. Ezért lesz $a_1 \cdot q^4 = a_5$

Illetve vehetjük itt is az **első n tag összegét**, ami a következő képlettel számítható ki:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1.6. Feladat. Mekkora a szabályos 24 oldalú sokszög szögei?

Megoldás. Első megoldás:

Egy konvex sokszöget pontosan kétszer kevesebb háromszögre lehet felbontani. Azt viszont tudjuk, hogy egy háromszög belső szögeinek összege 180° . Általánosítva a képlet konvex n -szög belső szögeinek összegére:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Jelen esetben $n = 24$, tehát:

$$(24 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$22 \cdot 180^\circ$$

$$3960^\circ$$

Arra figyeljünk, hogy egy belső szöget kér a feladat. Gondoljunk bele, hogy egy 24-szögnek mEgLePő MóDoN pOnT 24 szöge van. Waow!

Általánosítva egy konvex szabályos n -szög egy szögének nagysága:

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Jelen esetben $n = 24$, tehát:

$$\alpha = \frac{3960^\circ}{24} = 165^\circ$$

Megoldás. Második megoldás:

Tudjuk, hogy **bármely** konvex n -szög külső szögeinek összege 360° . Tehát egy külső szöge:

$$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

Na de mit tudunk egy belső és külső szög összegéről? Pontosan, azt hogy összegük 180° , mivel **mellékszögek**.

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

Jelen esetben $\alpha' = 15^\circ$, tehát $\alpha = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$

Órán néztünk két plusz feladatot is, beszéljük meg itt is ezeket!

a) Adott egy konvex n oldalú sokszög, melynek belső szögeinek összege 1800° . Mennyi n értéke?

Megoldás. Helyettesítsünk be az általunk ismert képletbe:

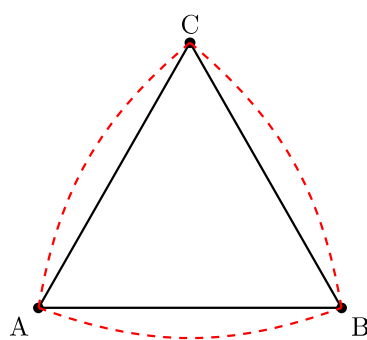
$$1800^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$10 = n - 2$$

$$12 = n$$

b) Adott egy konvex n oldalú sokszög, melynek átlóinak száma 54. Mennyi n értéke?

Megoldás. Három barát találkozik, kezét fognak egymással. Hány kézfogás is történik valójában? Az első srác kezét fog mindkét barátjával, majd a második srác csak a harmadikkal fog kezét, amiből következik, hogy a harmadik srác már mindnekivel fogott kezét.



Az ábrán feketével van jelölve a megvalósult kézfogás, míg pirossal a felesleges/kétszeres/oda-vissza kézfogás. Észrevehető, hogy az összes esetet felezni kell.

Vigyázz! A háromszögnek nincsen átlója, ez a példa csak az elképzelhető szemléltetés miatt került bemutatásra.

Azt említette Linda, hogy egy csúcsból NEM húzunk átlókat a két szomszédos csúcsba, illetve önmagába sem. Ebből adódik, hogy egy csúcsból $(n - 3)$ db átló húzható. Ezt természetesen minden csúcsból behúzzuk, majd az összes lehetőséget felezzük, a kétszeres-élek elkerülése érdekében:

$$\frac{n(n - 3)}{2}$$

A feladatunkban 54 átlónk van, ezt helyettesítsük be!

$$\frac{n(n - 3)}{2} = 54$$

$$n(n - 3) = 108$$

$$n^2 - 3n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

(következő oldalon folytatódik...)

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A megoldóképletben szereplő $a; b; c$ jelöli az egyenletben megjelenő számokat. Vigyázz! Az előjeleket ne hagyd le!!!

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -108$$

$$n_{1;2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108)}}{2 \cdot 1} = \frac{+3 \pm \sqrt{9 - (-432)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{3 \pm 21}{2}$$

$$n_{1;2} = \frac{3 \pm 21}{2} = \begin{cases} \frac{3 + 21}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ \frac{3 - 21}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \end{cases}$$

Arra figyeljünk, hogy a kiszámolt n egy geometriai adat, jelen esetben az oldalak darabszáma. Ez nEhEzEn tud negatív lenni. Ezért egy megoldás van csak:

$$n = 12$$