

3. Oszthatóság, oszthatósági szabályok és tételek. Prímszámok. Számrendszerek

Vázlat:

- I. Számelméleti alapfogalmak: osztó, többszörös, oszthatóság fogalma, tulajdonságai, oszthatósági szabályok
- II. Prímszám, összetett szám, a számelmélet alaptétele, osztók száma
- III. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös
- IV. Számrendszerek
- V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Oszthatóság

Az oszthatóság fogalma esetében alaphalmaznak az egész számok halmazát tekintjük. Két egész szám hányadosa nem mindig egész szám, az az oszthatóság esetén azt vizsgáljuk, hogy egész számok osztásakor mikor lesz a hányados is egész szám, vagyis a maradék 0.

DEFINÍCIÓ: Egy a egész szám **osztója** egy b egész számnak, ha található olyan c egész szám, amelyre $a \cdot c = b$. Jelölés: $a \mid b$. (Természetesen $c \mid b$ is igaz). Ebben az esetben az is igaz, hogy b **osztható** a -val és c -vel. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy b **többszöröse** a -nak.

A 0 szerepe a számelméletben:

- a 0 minden nemnulla egész számnak többszöröse (0-szorosa), azaz 0 minden nemnulla egész számmal osztható, ugyanis $0 = 0 \cdot a$: $a \mid 0$, ha $a \neq 0$. Ez azt is jelenti, hogy a 0 páros szám. A 0-nak egyetlen többszöröse van, a 0, viszont a 0 bármely egész számnak a többszöröse.
- a 0 nem osztója egyetlen nemnulla egész számnak sem, ugyanis ha 0 osztója lenne egy b nemnulla egész számnak, akkor létezne egy olyan c egész szám, amelyikre $b = c \cdot 0 = 0$ lenne, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy $b \neq 0$.

Oszthatósági tételek:

Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, akkor

TÉTEL: $1 \mid a$, azaz az 1 minden egész számnak osztója.

BIZONYÍTÁS: $a = a \cdot 1$.

TÉTEL: $a \mid a$, azaz minden egész szám osztója önmagának.

BIZONYÍTÁS: $a = 1 \cdot a$.

TÉTEL: Ha $a \mid b$ és $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, amelyre $b = a \cdot d$; a $b \mid c$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan e egész szám, amelyre $c = b \cdot e$ teljesül.

Ekkor $c = b \cdot e = (a \cdot d) \cdot e = a \cdot (d \cdot e)$ a szorzás asszociativitása miatt, ahol a $d \cdot e$ szorzat egész szám.

Ez azt jelenti, hogy van olyan egész szám, amelynek a -szorosa a c szám, vagyis $a \mid c$.

TÉTEL: Ha $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$, azaz ha egy egész szám osztója egy másik egész számnak, akkor a többszöröseinek is osztója.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Ekkor $b \cdot c = (a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c)$ a szorzás asszociativitása miatt. A $(d \cdot c)$ szorzat egész, tehát találtunk megfelelő egész számot, így $a \mid b \cdot c$.

TÉTEL: Ha $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$, azaz ha egész egy szám osztója két egész számnak, akkor az összegüknek és a különbségüknek is osztója.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Az $a \mid c$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan e egész szám, hogy $c = a \cdot e$. Ekkor $b \pm c = (a \cdot d) \pm (a \cdot e) = a \cdot (d \pm e)$ a disztributivitás miatt. A $(d \pm e)$ egész szám, tehát találtunk megfelelő egész számot, így $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$.

TÉTEL: Ha $a \mid b$ és $a \mid b + c \Rightarrow a \mid c$, azaz ha egy egész szám osztója egy összegnek és az összeg egyik tagjának, akkor osztója a másik tagnak is.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Az $a \mid b + c$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan e egész szám, amire $b + c = a \cdot e$. Ekkor $c = (b + c) - b = a \cdot e - a \cdot d = a \cdot (e - d)$. Mivel e és d egész számok, így különbségük is egész szám. Tehát találtunk megfelelő egész számot, amivel a -t szorozva c -t kapunk, így $a \mid c$.

Az oszthatóságot eddig az egész számokra értelmeztük, a továbbiakban leszűkítjük a természetes számokra, azaz a nemnegatív egész számokra. Egy adott problémánál tudjuk majd automatikusan alkalmazni az itt megfogalmazottakat az egész számokra.

TÉTEL: Ha $a, b \in \mathbb{Z}^+$, és $a \mid b$, valamint $b \mid a \Rightarrow a = b$, azaz ha két pozitív egész szám egymásnak osztója, akkor a két szám egyenlő.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, amire $b = a \cdot d$, a $b \mid a$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan e egész szám, amire $a = b \cdot e$.

Ekkor $b = a \cdot d = (b \cdot e) \cdot d = b \cdot (d \cdot e)$ a szorzás asszociativitása miatt.

Osztvá b -vel az egyenlet mindkét oldalát: $1 = d \cdot e$, aminek a pozitív egész számok halmazán csak a $d = e = 1$ a megoldása.

Ekkor viszont $a = b \cdot 1 = b$.

Oszthatósági szabályok:

Egy n egész szám osztható

- 2-vel, ha n páros, vagyis utolsó jegye $\in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
- 3-mal, ha a számjegyek összege osztható 3-mal.
- 4-gyel, ha a két utolsó jegyből képzett szám osztható 4-gyel.
- 5-tel, ha utolsó jegye $\in \{0; 5\}$.
- 6-tal, ha 2-vel és 3-mal osztható.
- 8-cal, ha a három utolsó jegyből képzett szám osztható 8-cal.
- 9-cel, ha számjegyek összege osztható 9-cel.
- 10-zel, ha utolsó jegye 0.

II. Prímszám, összetett szám, a számelmélet alaptétele, osztók száma

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, **prímszámoknak** nevezzük. Pl.: 2; 3; 5; 7; ... Az 1 nem prímszám.

TÉTEL: Végtelen sok prímszám van.

BIZONYÍTÁS: Indirekt módon: Tegyük fel, hogy véges sok, azaz n db prímszám van. Legyenek ezek $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Képezzük a következő számot: $A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.

Az A számnak a felsorolt n db prím egyike sem osztója. Ebből két lehetőség következhet: vagy az A szám is prím (az $n + 1$ -edik), vagy létezik olyan prím, amit nem soroltunk fel (akkor ez a prím az $n + 1$ -edik). Tehát mindkét esetben találtunk a felsorolásban nem szereplő prímszámot, ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz nem véges sok, hanem végtelen sok prímszám van.

DEFINÍCIÓ: Azokat az 1-nél nagyobb számokat, amelyek nem prímszámok, **összetett számok**nak nevezzük. Az összetett számoknak 2-nél több pozitív osztója van. Pl.: 4; 6; 8; 9; 10; ...

TÉTEL: A számelmélet alaptétele: bármely összetett szám felírható prímszámok szorzataként, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Kanonikus alak: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ különböző prímelek, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ nemnegatív egész számok.

Ekkor az n szám prímosztói: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$.

TÉTEL: Meghatározható az n szám **osztóinak száma** a következő módon: A fenti n számnak $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ darab pozitív osztója van.

DEFINÍCIÓ: Két vagy több pozitív egész szám **legnagyobb közös osztója** a közös osztók közül a legnagyobb. Jele: $(a; b)$.

Előállítás: felírjuk a számok prímtenyezős alakját, vesszük a közös prímtenyezőket (amelyek az összes felbontásban szerepelnek), ezeket a hozzájuk tartozó legkisebb kitevővel vesszük és összeszorozzuk.

DEFINÍCIÓ: Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a két szám **relatív prím**.

DEFINÍCIÓ: Két vagy több pozitív egész szám **legkisebb közös többszöröse** a közös többszörösök közül a legkisebb. Jele: $[a; b]$.

Előállítás: felírjuk a számok prímtenyezős alakját, vesszük az összes prímtenyezőt, ezeket a hozzájuk tartozó legnagyobb kitevővel vesszük és összeszorozzuk.

Összefüggés két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között: $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$.

III. Számrendszerek

DEFINÍCIÓ: Az a **alapú számrendszer** helyi értékei: $1, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$, az a alapú számrendszerben a -féle számjegy van: $0, 1, 2, \dots, a - 1$ (alaki érték), ha $a > 10$, akkor betűket használunk számjegyként.

A helyi értékes ábrázolás azt jelenti, hogy a számjegyek értékén kívül a leírásuk helye is értékkel bír. Egymás után írjuk a számjegyeket és az adott ponthoz viszonyítjuk az értéküket.

Általában 10-es számrendszerben dolgozunk. Ez azt jelenti, hogy a helyi értékek 10 természetes kitevőjű hatványai ($10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$, azaz egyesek, tízesek, százaskok, ezresek, ...). A számok leírására 10-féle számjegyre van szükség: $0, 1, 2, \dots, 9$.

A 10-es számrendszeren kívül az informatikában gyakran használják a 2-es, vagyis bináris számrendszert (Neumann-elv), napjainkban pedig inkább a 16-os, azaz hexadecimális számrendszert. Ez utóbbinál merült fel az a probléma, hogyan írunk le 16-féle számjegyet. Erre az a megoldás született, hogy a 10-nél nagyobb alapú számrendszerekben a 10, vagy annál nagyobb értékű számjegyeket betűkkel jelöljük. Így 16-os számrendszerben 10 helyett A, 11 helyett B, ..., 15 helyett F a számjegy.

Áttérés 10-es számrendszerből más alapúba**1. módszer:**

A számot osztjuk az új számrendszer alapszámával, majd az így kapott hányadost újra mindaddig, míg 0 hányadost nem kapunk. Az osztásoknál kapott maradékok lesznek az új szám alaki értékei az egyesektől kezdve.

Pl. 948_{10} a 7-es számrendszerbe átírva:

$$948 = 135 \cdot 7 + 3$$

$$135 = 19 \cdot 7 + 2$$

$$19 = 2 \cdot 7 + 5$$

$$2 = 0 \cdot 7 + 2$$

2. módszer:

A tízes számrendszerbeli számot maradékosan elosztjuk az új számrendszer legnagyobb, de a számnál kisebb helyi értékével, a kapott maradékkal ezt addig folytatjuk, amíg a maradék 0 nem lesz.

$$948 : 343 = 2, \text{ maradék } 262,$$

$$262 : 49 = 5, \text{ maradék } 17,$$

$$17 : 7 = 2, \text{ maradék } 3,$$

$$3 : 1 = 3, \text{ maradék } 0,$$

Így $948_{10} = 2523_7$.

Áttérés más alapúból 10-es számrendszerbe

A megfelelő helyi értékeknek és a hozzájuk tartozó alaki értékeknek a szorzatösszege adja a 10-es számrendszerbeli értéket:

Pl.: 2523_7 a 10-es számrendszerbe átírva:

$$2523_7 = 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 1 = 948_{10}$$

A műveletek elvégezhetők az adott számrendszerben, vagy tízes számrendszerben és az eredmény adott számrendszerbe való visszaírásával.

Összeadás n alapú számrendszerben

Helyi érték szerint egymás alá írjuk a számokat, akár többet is. Az összeadást az $n^0 = 1$ -es helyi értéken kezdjük, majd folytatjuk az $n^1, n^2, n^3, \dots$ helyi értékek felé. Mi 10-es számrendszerben tudunk összeadni, így az összegeket mindig 10-esben kapjuk meg, majd a kapott eredményt átváltjuk n -es számrendszerbe.

Ha az összeg n -nél kisebb, akkor leírjuk, mert n -nél kisebb számok minden számrendszerben azonos alakúak.

Ha az összeg nagyobb vagy egyenlő n -nél, akkor a kapott számot átírjuk 10-es számrendszerből n -es számrendszerbe. A kapott szám utolsó számjegyét leírjuk a megfelelő helyi értékre, az első számjegyét pedig az előző helyi érték fölé írjuk.

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg a legelső számjegyig nem jutunk.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 5726_{(8)} \\ + 315_{(8)} \\ \hline 6243_{(8)} \end{array}$$

$$6 + 5 = 11_{(10)} = 13_{(8)}$$

$$1 + 2 + 1 = 4_{(10)} = 4_{(8)}$$

$$7 + 3 = 10_{(10)} = 12_{(8)}$$

$$1 + 5 = 6_{(10)} = 6_{(8)}$$

$$\begin{array}{r}
 211 \\
 2431_{(5)} \\
 10324_{(5)} \\
 + 430_{(5)} \\
 \hline
 14240_{(5)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 + 4 + 0 = 5_{(10)} = 10_{(5)} \\
 1 + 3 + 2 + 3 = 9_{(10)} = 14_{(5)} \\
 1 + 4 + 3 + 4 = 12_{(10)} = 22_{(5)} \\
 2 + 2 + 0 = 4_{(10)} = 4_{(5)} \\
 1 = 1_{(10)} = 1_{(5)}
 \end{array}$$

Kivonás n alapú számrendszerben

Helyi érték szerint egymás alá írjuk a számokat. Az összeadást az $n^0 = 1$ -es helyi értéken kezdjük, majd folytatjuk az $n^1, n^2, n^3, \dots$ helyi értékek felé.

Ha a kisebbítendő nagyobb vagy egyenlő a kivonandónál, akkor elvégezzük a kivonást, a különbséget leírjuk a megfelelő helyi értékre. Mivel n -nél kisebb értéket kapunk, nem kell átváltanunk, mert n -nél kisebb számok értéke minden számrendszerben egyenlő.

Ha a kisebbítendő (a) kisebb, mint a kivonandó (b), akkor $1a_n = (n + a)_{10}$ -ból vonjuk ki b -t, leírjuk a megfelelő helyi értékre az $(n + a - b)_{10}$ számot, az előző helyi értéken levő kivonandóhoz 1-et adunk, és így végezzük el a kivonást.

$$\begin{array}{r}
 6243_{(8)} \\
 -5726_{(8)} \\
 \hline
 315_{(8)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3 < 6 \Rightarrow 13_{(8)} = 11_{(10)} \Rightarrow 11 - 6 = 5_{(10)} = 5_{(8)} \\
 2 + 1 = 3 \Rightarrow 4 - 3 = 1_{(10)} = 1_{(8)} \\
 2 < 7 \Rightarrow 12_{(8)} = 10_{(10)} \Rightarrow 10 - 7 = 3_{(10)} = 3_{(8)} \\
 5 + 1 = 6 \Rightarrow 6 - 6 = 0_{(10)} = 0_{(8)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6235_{(9)} \\
 -2478_{(9)} \\
 \hline
 3646_{(9)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 5 < 8 \Rightarrow 15_{(9)} = 14_{(10)} \Rightarrow 14 - 8 = 6_{(10)} = 6_{(9)} \\
 7 + 1 = 8 \Rightarrow 3 < 8 \Rightarrow 13_{(9)} = 12_{(10)} \Rightarrow 12 - 8 = 4_{(10)} = 4_{(9)} \\
 4 + 1 = 5 \Rightarrow 5 < 2 \Rightarrow 12_{(9)} = 11_{(10)} \Rightarrow 11 - 5 = 6_{(10)} = 6_{(9)} \\
 2 + 1 = 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3_{(10)} = 3_{(9)}
 \end{array}$$

IV. Alkalmazások:

- Legnagyobb közös osztó: törtek egyszerűsítése
- Legkisebb közös többszörös: törtek közös nevezőre hozása
- Kétismeretlenes egyenlet megoldása a természetes számok halmazán (oszthatóság felhasználásával) pl.:

$$\begin{aligned}
 3x + 2y &= xy \\
 3x &= xy - 2y \\
 3x &= y(x - 2) \\
 y &= \frac{3x}{x - 2} = \frac{3x - 6}{x - 2} + \frac{6}{x - 2} = 3 + \frac{6}{x - 2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x - 2 \mid 6
 \end{aligned}$$

Ez a következő esetekben lehetséges:

$x - 2$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
x	3	4	5	8	1	0	-1	-4
y	9	6	5	4	-3	0	1	2

A táblázatban szerepel az összes megoldás, az 5 megjelölt számpár felel meg a feltételnek.

- Számítógépekben a 2-es számrendszer a két jegyével jól használható: folyik áram = 1, nem folyik áram = 0 (Neumann-elv). Ma már inkább a 16-os, hexadecimális számrendszert használják, ami felépíthető a kettesből.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az egyiptomi **Rhind-papiruszon** (Kr. e. 2000–1700) a „törztörtek” felsorolásában csak a páratlan nevezőjű törtek szerepeltek, tehát az egyiptomiak különbséget tettek a páros és a páratlan számok között.
- Az öttel való oszthatóságot az **ókori hinduk** is ismerték.
- A hárommal való oszthatóság szabályát először a pizai **Leonardo** írta le (1200 körül).
- A tizeneggyel való oszthatóság szabályát a XI. századi **arab** matematikusok ismerték, viszont szabatosan csak **Lagrange** (1736–1813) francia matematikus fogalmazta meg: a páros helyi értéken álló számjegyeinek összege megegyezik a páratlan helyi értéken álló számjegyek összegével, vagy a kettő különbsége 11-nek a többszöröse.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus teljes általánosságban vizsgálta az oszthatóságot a természetes számok körében.
- Prímszámok meghatározása az **eratoszthenészi** (Kr. e. III. század) szitával: Felírjuk 2-től kezdődően az egész számokat (ő 100-ig csinálta). A 2-t bekeretezzük, ez az első prímszám, majd kihúzzuk az összes olyan számot, ami 2 többszöröse (minden másodikat). Bekeretezzük az első át nem húzott számot, a 3-at, ez a következő prímszám. Innen kezdve áthúzzuk a 3 többszöröseit (minden harmadikat). Ezt az eljárást folytatva megkapjuk a prímszámokat (bekeretezett számok).
- A **sumérok** (Kr. e. 2000 előtt) a 10-es, 12-es és 60-as alapú számrendszer kombinációját használták az asztronómiai és egyéb számításaiknál. Ezt a rendszert átvették a **görögök**, a **rómaiak** és az **egyiptomiak**. A 60-as számrendszer maradványait felismerhetjük a mai idő- (órák, percek) és a szögmérésben (szögpercek).
- A **12-es számrendszer** nagyon népszerű volt, mert a 12 maradék nélkül osztható 2-vel (felezhető), 3-mal (harmadolható), 4-gyel (negyedelhető), 6-tal (hatodolható). A ma használt naptárban az év 12 hónapra oszlik, 12 óra a nappal és 12 óra az éjszaka az év mind a 365 napján. Csaknem minden nyelvben külön szó van a 12 dologból álló csoportra, például a magyar „tucat”, az angol „dozen”, a német „das Dutzend”, az orosz „djuzsina” stb.
- Nyelvészeti kutatások szerint az ősmagyarok a hetes számrendszert ismerték, használták: mesék hétfejű sárkány, heted hét ország, hétmérföldes csizma, hétpecsés titok, hétszerte szebb lett stb.
- A 2-es alapú bináris számrendszert már a XVII. században **Leibniz** ismertette, aki Kínában hallott róla, de általános használata a XX. században, a számítógépek megjelenésével terjedt el.
- **Neumann János** (1903–1957) magyar származású matematikus a róla elnevezett elvben megfogalmazta a számítógépek működési elvét. Ebben a számítógépek használnak kettes számrendszert, az összes művelet kettes számrendszerbeli logikai műveletre redukálható.