

1.

1.1. Feladat. Egy cipőboltban novemberben három pár cipő összesen 45 000 Ft-ba került. Egy karácsonyi akció keretében, ha valaki három pár cipőt egyszerre vásárolt, akkor a legolcsóbbat 50 %, a második legolcsóbbat pedig 20 % kedvezménnyel vehette meg (a legdrágább cipőre nem járt kedvezmény). Ebben az akcióban ugyanezért a három pár cipőért így összesen már csak 37 000 Ft-ot kellett fizetni. Karácsony elmúltával az akció véget ért, és a legolcsóbb cipő árát – a novemberi árához képest – 30 %-kal megemelték, így a három pár cipő ekkor összesen 48 000 Ft-ba került.

a) Határozza meg mindhárom pár cipő novemberi árát!

Megoldás. Egyenletrendszert akkor tudunk megoldani, ha van ugyanannyi (különböző) egyenletünk, mint ismeretlenünk. Fontos, hogy most ezresekben fogok számolni, a végén ne felejtjük el felszorozni az eredményeket ezerrel.

$$\left. \begin{array}{l} (I.) \quad x + y + z = 45 \\ (II.) \quad 0,5x + 0,8y + z = 43 \\ (III.) \quad 1,3x + y + z = 37 \end{array} \right\}$$

Fejezzük ki az (I.) egyenletből a z -t.

$$z = 45 - x - y$$

Majd helyettesítsük be a (II.)-ba és (III.)-ba.

$$\left. \begin{array}{l} (II.) \quad 0,5x + 0,8y + 45 - x - y = 43 \\ (III.) \quad 1,3x + y + 45 - x - y = 48 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (II.) \quad -0,5x - 0,2y = -8 \\ (III.) \quad 0,3x + \quad \quad = 3 \end{array} \right\}$$

A (III.) egyenletben csak x maradt. Tehát ebből kapjuk, hogy $x = 10$. Ezt behelyettesítve a (II.)-ba, kapjuk:

$$(II.) \quad -0,5 \cdot 10 - 0,2y = -8$$

$$(II.) \quad -5 - 0,2y = -8$$

$$y = 15$$

Ekkor helyettesítsünk be a legelső kifejezett egyenletbe:

$$z = 45 - 10 - 15 = 25$$

Tehát a végeredmény:

$$(x; y; z) = (10\,000; 15\,000; 20\,000)$$

Ellenőrzés!

Négy szám közül az első három szám egy számtani, az utolsó három szám pedig egy mértani sorozat egymást követő három tagja. Az első szám a 3, a negyedik szám a 25.

b) Határozza meg a másik két számot!

Megoldás.

$$\left. \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 3 & 3+d & 3+2d & 25 \\ 3 & 3+d & (3+d)q & 25 \end{array} \right\}$$

Használjuk ki, hogy mértani sorozatot alkotnak az elemek.

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2}$$

Behelyettesítve:

$$\frac{25}{3+2d} = \frac{3+2d}{3+d}$$

Keresztbe szorozva:

$$25(3+d) = (3+2d)^2$$

$$0 = 4d^2 - 13d - 66$$

$$d_1 = 6 \qquad d_2 = -2,75$$

Innentől kettő megoldással kell foglalkoznunk:

- ha $d_1 = 6$, akkor

$$\left. \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 3 & 9 & 15 & 25 \end{array} \right\}$$

Ellenőrizzük le, hogy $a_2; a_3; a_4$ tényleg mértani sorozatot alkotnak-e.

$$\frac{25}{15} = q = \frac{15}{9}$$

a két hányados egyenlő, tehát mértani sorozatot alkotnak,

- ha $d_1 = -2,75$, akkor

$$\left. \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 3 & 0,25 & -2,5 & 25 \end{array} \right\}$$

Ellenőrizzük le, hogy $a_2; a_3; a_4$ tényleg mértani sorozatot alkotnak-e.

$$\frac{25}{-2,5} = q = \frac{-2,5}{0,25}$$

a két hányados egyenlő, tehát mértani sorozatot alkotnak,

1.2. Feladat. Egy kis szigeten élő állatfajok populációinak egyedszámát egy modell szerint (jó közelítéssel) a következő képlet adja meg:

$$P(t) = \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-ct}}$$

A képletben $P(t)$ az adott faj populációjának egyedszáma a vizsgálat kezdetétől számított t év elteltével, E , k és c pedig az adott faj populációjára jellemző pozitív állandók: E a sziget eltartóképessége (a becsült maximális egyedszám, amit a sziget el tud tartani), k a populáció kezdeti méretétől, c pedig a populáció növekedési sebességétől függő állandó.

a) Egy emlősfajra jellemző állandók értéke $k = 1,5$ és $c = 0,05$. Tudjuk, hogy a vizsgálat kezdetétől számított 8 év elteltével 140 egyedből áll a faj populációja. Határozza meg a szigetnek az erre az emlősfajra jellemző eltartóképességét!

Megoldás. Legelőször le kell tisztázni magunkban, hogy az exponenciális folyamatunkban melyik ismeretlen mit takar.

Ezek után értelmezzük az a) feladatot, hogy mely adatokat adták meg, illetve mit keresünk.

A következő adatokat tudjuk:

$$k = 1,5 \quad c = 0,05 \quad t = 8 \quad P(t) = 140 \quad E = ?$$

$$P(t) = \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-ct}}$$

$$140 = \frac{E}{1 + 1,5 \cdot 2^{-0,05 \cdot 8}}$$

$$140 \approx \frac{E}{2,14}$$

$$299,6 \approx E$$

Ekkor lefelé kell kerekítenünk, mivel körülbelül 299 és fél egyed fér el, tehát 300 már nem.

$$E = 299$$

Egy kis szigeten élő állatfajok populációinak egyedszámát egy modell szerint (jó közelítéssel) a következő képlet adja meg:

$$P(t) = \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-ct}}$$

A képletben $P(t)$ az adott faj populációjának egyedszáma a vizsgálat kezdetétől számított t év elteltével, E , k és c pedig az adott faj populációjára jellemző pozitív állandók: E a sziget eltartóképessége (a becsült maximális egyedszám, amit a sziget el tud tartani), k a populáció kezdeti méretétől, c pedig a populáció növekedési sebességétől függő állandó.

b) Egy rágcsálófaj esetén a sziget eltartóképessége 1 500 egyed. Határozza meg az erre a populációra jellemző k és c állandók értékét, ha a vizsgálat kezdetekor 200, öt évvel később pedig 350 egyedből állt a populáció!

c) Igazolja, hogy egy populáció $P(t)$ egyedszáma a modell szerint soha nem haladhatja meg a sziget (adott populációra jellemző) eltartóképességét!

Megoldás. b)

$$k = ? \quad c = ? \quad P(t = 0) = 200 \quad P(t = 5) = 350 \quad E = 1\,500$$

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-ct}} \\ P(t = 0) &= \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-c \cdot 0}} = 200 \\ P(t = 5) &= \frac{E}{1 + k \cdot 2^{-c \cdot 5}} = 350 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletben c kiesik, illetve $2^0 = 1$, tehát:

$$\left. \begin{aligned} P(t = 0) &= \frac{1\,500}{1 + k \cdot 1} = 200 \\ P(t = 5) &= \frac{1\,500}{1 + k \cdot 2^{-c \cdot 5}} = 350 \end{aligned} \right\}$$

$$P(t = 0) = \frac{1\,500}{1 + k} = 200$$

$$k = 6,5$$

Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$P(t = 5) = \frac{1\,500}{1 + 6,5 \cdot 2^{-c \cdot 5}} = 350$$

$$1\,500 = 350 (1 + 6,5 \cdot 2^{-c \cdot 5})$$

$$1\,500 = 350 + 2\,275 \cdot 2^{-c5}$$

$$1\,150 = 2\,275 \cdot 2^{-c5}$$

$$0,51 \approx 2^{-c5}$$

$$\lg 0,51 \approx \lg 2^{-c5}$$

Logaritmiás azonosság alapján: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$$\lg 0,51 \approx -c5 \cdot \lg 2$$

$$c \approx \frac{\lg 0,51}{-5 \cdot \lg 2} \approx 0,194$$

1.3. Feladat. Az $\{a_n\}$ sorozat tagjaira $n \geq 2$ esetén az $a_n = a_{n-1} + n$ összefüggés teljesül. Egy négyszög belső szögei (fokban mérve) a_1, a_2, a_3 és a_4 .

a) Határozza meg a négyszög belső szögeinek nagyságát!

Megoldás. A fontos információ a rekurzió képlete, ami itt: $a_n = a_{n-1} + n$, illetve az, hogy a sorozat négy tagja a négyszög belső szögeit jelöli, tehát összegük 360° .

$$\left. \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ & a_1 + 2 & a_2 + 3 & a_3 + 4 \\ & & (a_1 + 2) + 3 & (a_2 + 3) + 4 \\ & & a_1 + 5 & (a_1 + 2) + 3 + 4 \\ & & & a_1 + 9 \end{array} \right\}$$

Tehát a tagok rendre:

$$a_1 \quad a_1 + 2 \quad a_1 + 5 \quad a_1 + 9$$

Használjuk ki, hogy összegük 360° !

$$a_1 + a_1 + 2 + a_1 + 5 + a_1 + 9 = 360$$

$$4a_1 + 16 = 360$$

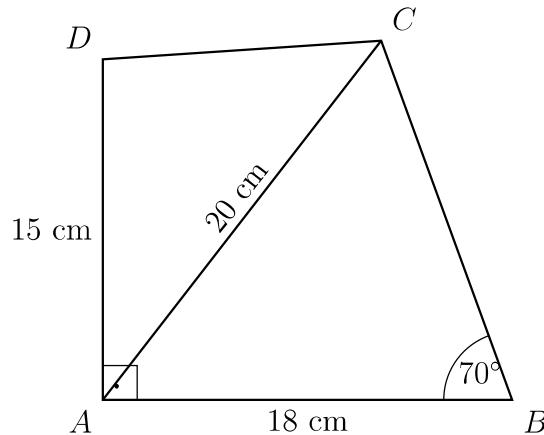
$$4a_1 = 344$$

$$a_1 = 86$$

Azaz a szögek:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_1 + 2 & a_1 + 5 & a_1 + 9 \\ 86^\circ & 88^\circ & 91^\circ & 95^\circ \end{array}$$

Az $ABCD$ négyszög oldalai, átlói és szögei közül ismertek a következők: $AB = 18$ cm, $AD = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$.



b) Határozza meg a négyszög BC és CD oldalának hosszát!

Megoldás. Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen $BC = x$ és $CD = y$. Itt a trigonometria fog segíteni, viszont figyeljünk arra, hogy a szögfüggvényeket ($\sin - \cos - \operatorname{tg} - \operatorname{ctg}$) CSAK derékszögű háromszögben alkalmazhatjuk. Ezért itt tételeket kell alkalmazni.

Megbeszéltük, hogy a koszinusz-tétel csak akkor kell, ha

- a három oldalt ismerjük
- két oldalt és az általuk közbezárt szöget

Most nem ez a helyzet, hiszen most az X -módszert alkalmazzuk. Keresünk egy oldal-szög párost, ahol mindkettőt ismerünk, illetve egy másik ilyen párost, ahol csak az egyiket ismerjük. Ezekkel fel tudjuk írni a szinusztételt, ahol a $\angle BCA = \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 70^\circ} = \frac{18}{20}$$

Figyeljünk arra, hogy 4 tizedesjegyre kerekítsünk!

$$\sin \alpha \approx 0,8457$$

Most jön a SHIFT-es varázslat, ami eltüntetni a $\sin$ -t:

$$\alpha \approx 57,75^\circ$$

Ekkor a $\angle CAB = 180^\circ - (70^\circ + 57,75^\circ) = 52,25^\circ$ Ekkor felírható a szinusztétel:

$$\frac{x}{20} = \frac{\sin 52,25^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$x \approx 16,83 \text{ cm}$$

Ha $\angle DAB = 90^\circ$ és $\angle CAB = 52,25^\circ$, akkor $\angle DAC = 90^\circ - 52,25^\circ = 37,75^\circ$. Ekkor tudunk két oldalt, illetve az általuk bezárt szöveget, amit keresünk, az meg pont a szöggel szembeni oldal. Eléggé gyanúsan koszinusztétel...

$$y^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 37,75^\circ$$

$$y^2 \approx 150,6$$

$$y \approx 12,27 \text{ cm}$$