

## 5. Hatványozás, a hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az $n$ -edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény

### Vázlat:

- I. Pozitív egész kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságai
- II. Permanenciaelv
- III. Negatív egész, törtekitevős, irracionális kitevőjű hatvány
- IV. Az  $n$ -edik gyök fogalma ( $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n \neq 1$ )
- V. A négyzetgyök azonosságai
- VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai
- VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai
- VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

### Kidolgozás:

#### I. Pozitív egész kitevőjű hatványok

A hatványozást ugyanaz az igény hívta létre, mint a szorzást. A szorzás az ismételt összeadást jelenti, a hatványozást azonos számok szorzására vezették be, később kiterjesztették az értelmezését.

**DEFINÍCIÓ:** Ha  $a$  tetszőleges valós szám és  $n$  1-nél nagyobb természetes szám, akkor  $a^n$  **hatvány** azt az  $n$  tényezős szorzatot jelenti, amelynek minden tényezője  $a$ .

Ha  $n = 1$ , akkor  $a^1 = a$ .

Az  $a$  számot a hatvány alapjának, az  $n$  számot a hatvány kitevőjének nevezzük, ez utóbbi megmutatja, hogy a hatványalapot hányszor kell szorozótényezőül venni.

**A hatványozás azonosságai pozitív egész kitevő esetén: ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^+$ )**

**TÉTEL: Azonos alapú hatványok szorzása:** Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**BIZONYÍTÁS:**

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db}} \stackrel{\text{szorzás asszoc.}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ db}} \stackrel{\text{hatv. def.}}{=} a^{m+n}.$$

**TÉTEL: Azonos alapú hatványok osztása:** Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ ha } a \neq 0, m > n.$$

**BIZONYÍTÁS:**

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ db}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}} \stackrel{\text{egyszerűsítés}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m-n \text{ db}}}{1} \stackrel{\text{hatv. def.}}{=} a^{m-n}.$$

**TÉTEL: Szorzat hatványozása:** Szorzatot tényezőként is hatványozhatunk:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

**BIZONYÍTÁS:**

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ db}} = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}_{\text{szorzás asszoc.}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ db}} = a^n \cdot b^n. \end{aligned}$$

**TÉTEL: Tört hatványozása:** Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt külön-külön hatványozzuk és a kapott hatványoknak a kívánt sorrendben a hányadosát vesszük.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ ha } b \neq 0.$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

**BIZONYÍTÁS:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ db}} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}}_{\text{törtek szorzása}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

**TÉTEL: Hatvány hatványozása:** Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

**BIZONYÍTÁS:**

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot \dots \cdot (a^n)}_{m \text{ db}} = \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right) \cdot \dots \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right)}_{m \text{ db}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ db}} = a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

## II. Permanenciaelv

A hatványozás fogalmát kiterjesztjük minden egész kitevőre, majd egész kitevőről racionális kitevőre, majd racionálisról irracionális kitevőre úgy, hogy az előbbi, pozitív egész kitevőre teljesülő azonosságok továbbra is teljesüljenek. A fogalom értelmezésének kiterjesztése esetén ezt az igényt nevezzük **permanenciaelvnek**.

## III. A hatványozás kiterjesztése

A 2. azonosság segítségével a hatványozás fogalma kibővíthető az **egész számokra** a következő módon:

**DEFINÍCIÓ:** Tetszőleges  $a \neq 0$  valós számra  $a^0 = 1$ . Minden nullától különböző valós számnak a **nulladik hatványa** 1.

$0^0$ -t nem értelmezzük (nem lehet úgy értelmezni, hogy összhangban legyen a hatványozás értelmezéseivel:

- $0^0 = 0$  kellene, hogy legyen, mert 0 minden pozitív egész kitevő hatványa 0.
- $0^0 = 1$  kellene, hogy legyen, mert minden egyéb szám nulladik hatványa 1.)

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.  
Pl.

$$\left. \begin{aligned} a^0 \cdot a^n &= a^{0+n} = a^n \\ a^0 \cdot a^n &= 1 \cdot a^n = a^n \end{aligned} \right\}$$

**DEFINÍCIÓ:** Tetszőleges  $a \neq 0$  valós szám és  $n$  pozitív egész szám esetén  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ . Minden 0-tól

különböző valós szám **negatív egész kitevőjű hatványa** a szám megfelelő pozitív kitevőjű hatványának a reciproka (vagy a szám reciprokának a megfelelő pozitív kitevőjű hatványa).

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.  
Pl.

$$\left. \begin{aligned} a^{-n} \cdot a^n &= a^{-n+n} = a^0 = 1 \\ a^{-n} \cdot a^n &= \frac{1}{a^n} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1 \end{aligned} \right\}$$

Ezzel a két definícióval a 2. azonosság igaz minden  $n, m \in \mathbb{Z}$ -re:

Ha  $n = m$ , akkor  $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$ .

Ha  $m < n$ , akkor  $m$  darab  $a$ -val egyszerűsítünk, a számlálóban 1, a nevezőben pedig  $n - m$  darab  $a$  szorzótényező marad, ami a hatvány definíciója miatt  $\frac{1}{a^{n-m}}$ . Alkalmazva a negatív egész kitevőjű hatvány definícióját  $\frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n}$ .

A hatványozás fogalmát ezután **racionális kitevőre** terjesztjük ki:

**DEFINÍCIÓ:** Az  $a$  pozitív valós szám  $\frac{p}{q}$ -adik hatványa az a pozitív valós szám, amelynek  $q$ -adik

hatványa  $a^p$ , azaz  $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$ .

A definícióból következik:  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ .

Az alap csak pozitív szám lehet, mert például

$$(-2)^{\frac{2}{4}} = \left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ értelmes,}$$

$(-2)^{\frac{2}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$  nem értelmezhető, pedig a két hatvány értékének (azonos alap, azonos kitevő) meg kell egyeznie.

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.  
Pl.

$$\left. \begin{aligned} \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n &= a^{\frac{k}{n} \cdot n} = a^k \\ \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k \end{aligned} \right\}$$

A hatványozást kiterjeszthetjük tetszőleges **valós kitevőre**. Ehhez az **irracionális kitevőt** kell értelmeznünk.

Az értelmezés azon alapul, hogy bármely irracionális szám tetszőlegesen közelíthető két oldalról racionális számokkal. Így ha pl.:  $2^{\sqrt{2}}$  hatványt szeretnénk meghatározni, akkor ehhez a  $\sqrt{2}$  értékét közelítjük nála kisebb, illetve nála nagyobb racionális számokkal, majd a közelítő értékekre mint kitevőre emeljük a 2-t. Bizonyítható, hogy  $2^{\sqrt{2}}$  értéke létezik, és ily módon tetszőlegesen közelíthető (rendőrelv).

**DEFINÍCIÓ:** Az  $a$  pozitív valós szám  $\alpha$  irracionális kitevőjű hatványa, azaz  $a^\alpha$  jelentse az  $a^r$  sorozat határértékét, ahol  $r$  egy racionális számsorozat tagjait jelöli és  $r \rightarrow \alpha$ . Képlettel:

$$\lim_{r \rightarrow \alpha} a^r = a^\alpha.$$

#### IV. Az $n$ -edik gyök fogalma

A gyökvonás művelete a hatványkitevő és a hatvány ismeretében az alap kiszámolását teszi lehetővé. A gyökvonás a hatványozás egyik fordított művelete: az  $a$  valós szám  $n$ -edik gyöke ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \neq 1$ ) az  $x^n = a$  egyenlet megoldása.

Az  $a$  szám  $n$ -edik gyökének jelölése:  $\sqrt[n]{a}$ , ha  $n \in \mathbb{N}^+$ .

A gyökvonás értelmezésénél különbséget kell tenni a páros és páratlan gyökkitevő között (hiszen páros  $n$ -re és negatív  $a$ -ra az  $x^n = a$  egyenletnek nincs megoldása, mivel a valós számok páros kitevőjű hatványa nem lehet negatív. Tehát páros  $n$ -re és negatív  $a$ -ra az  $a$  szám  $n$ -edik gyöke nem értelmezhető.)

**DEFINÍCIÓ:** Egy  $a$  valós szám  $(2k+1)$ -edik ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) gyökén azt a valós számot értjük, amelynek  $(2k+1)$ -edik hatványa  $a$ .

Képlettel:  $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**DEFINÍCIÓ:** Egy nemnegatív valós  $a$  szám  $2k$ -adik ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) gyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek  $2k$ -adik hatványa  $a$ .

Képlettel:  $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ , ahol  $a \geq 0$ ,  $\sqrt[2k]{a} \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**DEFINÍCIÓ:** Egy nemnegatív valós  $a$  szám **négyzetgyökén** azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek négyzete  $a$ .

Képlettel:  $(\sqrt{a})^2 = a$ , ahol  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a} \geq 0$ .

A páros és páratlan gyökkitevőre vonatkozó definíciók közötti különbségből adódóan:  $(\sqrt[2k]{a^{2k}}) = |a|$  és  $(\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}) = a$ , pl.  $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$ , de  $\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$ .

#### V. A négyzetgyök azonosságai

**TÉTEL:**  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , ha  $a, b$  nemnegatív valós számok.

**Szorzat négyzetgyöke** egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával. Tehát szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt.

**BIZONYÍTÁS:** Vizsgáljuk mindkét oldal négyzetét:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b,$$

a négyzetgyök definíciója miatt.

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b,$$

a szorzat hatványának azonossága és a négyzetgyök definíciója miatt.

A két oldal négyzete egyenlő.

Ha mindkét oldal értelmes, vagyis nemnegatív, akkor a hatványozás azonosságából következik a két oldal egyenlősége.

**TÉTEL:**  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , ha  $a, b$  nemnegatív valós számok,  $b \neq 0$ .

**Tört négyzetgyöke** egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

**TÉTEL:**  $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$ , ha  $k$  egész,  $a > 0$  valós szám.

A hatványozás és a gyökvonás sorrendje felcserélhető egymással pozitív alap esetén.

Figyelnünk kell arra, hogy a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás sorrendje nem cserélhető fel, ha az alap negatív. Így általánosan:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

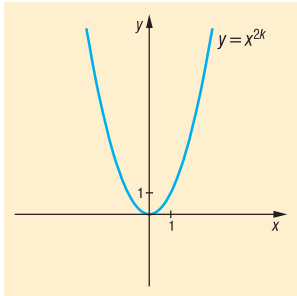
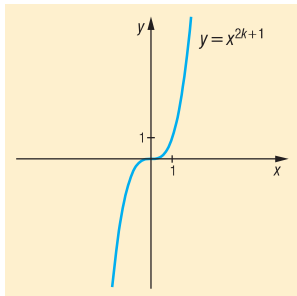
## VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai

**DEFINÍCIÓ:** Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$  függvényt, ahol  $n \in \mathbb{N}^+$ , hatványfüggvénynek nevezzük.

A hatványfüggvények értelmezhetőek  $n = 0$  esetre is, de ettől most eltekintünk.

A hatványfüggvény vizsgálatát két részre kell bontanunk aszerint, hogy  $n$  páros-e vagy páratlan.

Jellemzés:

| A függvény              | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}$                                                                       | $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^{2k+1}$                                                   |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ábrázolása:             |                                           |                       |
| értelmezési tartománya: | valós számok halmaza: $\mathbb{R}$                                                                                          | valós számok halmaza: $\mathbb{R}$                                                                        |
| értékkészlete:          | nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$                                                                           | valós számok halmaza: $\mathbb{R}$                                                                        |
| monotonitása:           | ha $x < 0$ , akkor szigorúan monoton csökken, ha $x > 0$ , akkor szigorúan monoton nő                                       | szigorúan monoton nő                                                                                      |
| szélsőértéke:           | abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$ .                                                      | nincs                                                                                                     |
| görbülete:              | alulról konvex                                                                                                              | ha $x < 0$ , akkor alulról konkáv, ha $x > 0$ , akkor alulról konvex                                      |
| zérushelye:             | $x = 0$                                                                                                                     | $x = 0$                                                                                                   |
| paritása:               | páros: $f(-x) = f(x)$                                                                                                       | páratlan, vagyis $g(-x) = -g(x)$                                                                          |
| korlátosság:            | alulról korlátos, felülről nem korlátos                                                                                     | nem korlátos                                                                                              |
| invertálhatóság:        | invertálható, ha $x \geq 0$ : inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény | invertálható: inverze az $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvény |

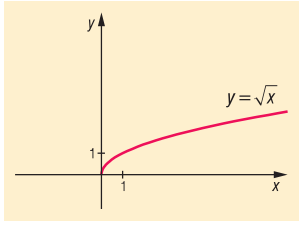
Görbület szempontjából külön kell venni az  $n = 1$  esetet: ekkor a függvény se nem konvex, se nem konkáv.

A hatványfüggvények folytonosak, minden pontban deriválhatóak, minden korlátos intervallumon integrálhatóak.

## VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai

**DEFINÍCIÓ:** Az  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$  függvényeket négyzetgyökfüggvényeknek nevezzük.

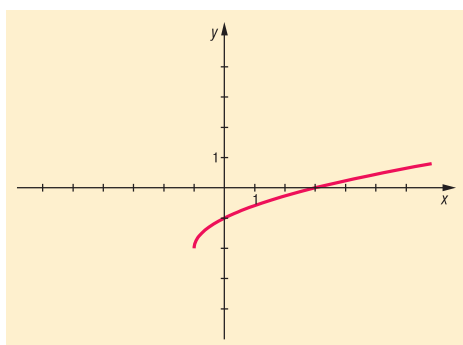
Jellemzés:

|                                |                                                                                                    |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A függvény</b>              | $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$                                        |
| <b>ábrázolása:</b>             |                  |
| <b>értelmezési tartománya:</b> | nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$                                                  |
| <b>értékkészlete:</b>          | nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$                                                  |
| <b>monotonitása:</b>           | szigorúan monoton nő                                                                               |
| <b>szélsőértéke:</b>           | abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$                               |
| <b>görbülete:</b>              | alulról konkáv                                                                                     |
| <b>zérushelye:</b>             | $x = 0$                                                                                            |
| <b>paritása:</b>               | nincs: nem páros, nem páratlan                                                                     |
| <b>korlátosság:</b>            | alulról korlátos, felülről nem korlátos                                                            |
| <b>invertálhatóság:</b>        | invertálható: inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x^2$ függvény |

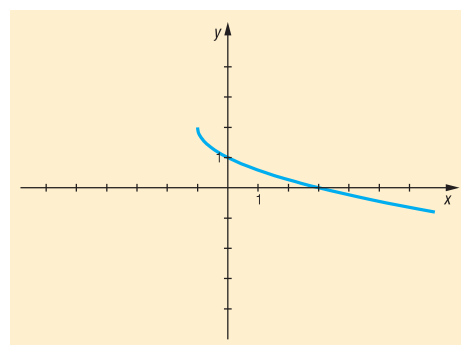
A gyökfüggvények folytonosak, differenciálhatóak, integrálhatóak.

Példák négyzetgyökfüggvényre:

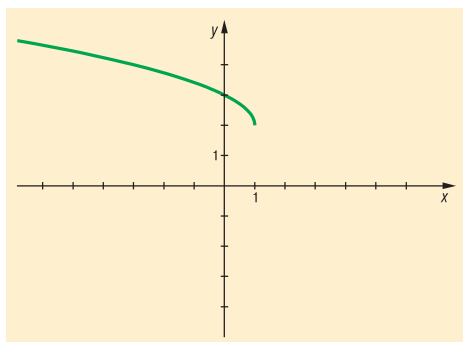
$$f(x) = \sqrt{x+1} - 2$$



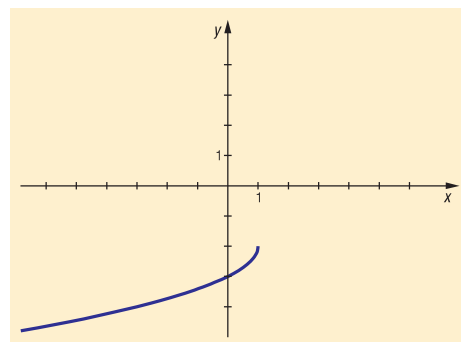
$$f(x) = -\sqrt{x+1} + 2$$



$$f(x) = \sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{-(x-1)} + 2$$



$$f(x) = -\sqrt{1-x} - 2 = -\sqrt{-(x-1)} - 2$$



## VIII. Alkalmazások:

### Hatványozás:

- Prímtényező felbontásban pozitív egész kitevőjű hatványok, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- Normálalakban: egyszerűbb a kicsi és a nagy számokkal való műveletek elvégzése
- A számrendszerek felépítése a hatványozáson alapul
- Mértani sorozat:  $a_n$ ,  $S_n$  kiszámolása
- Ismétléses variációk száma:  $n^k$
- Hasonló testek felszínének aránya  $\lambda^2$ , térfogatának aránya  $\lambda^3$
- Kamatos kamat számítása
- Négyzetes úttörvény:  $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$
- Radioaktív bomlás
- Mértékegységváltás
- Binomiális eloszlás
- Nevezetes azonosságok

### Gyökvonás:

- Magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Mértani közép (gyökvonás)
- Magasság-, illetve befogótétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Kocka élének vagy gömb sugarának kiszámolása a térfogatból
- $l$  hosszúságú fonálinga lengésideje:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- $h$  magasságból szabadon eső test sebessége:  $v = \sqrt{2gh}$
- Kamatos kamatnál a kamattényező kiszámítása
- Harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciájának kiszámítása

### Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már időszámításunk kezdetén ismerték kínai matematikusok a négyzetgyök és köbgyök fogalmát, a mai jelölésrendszere a XVI. században alakult ki.
- A XIII. századi kínai matematikusok az egyenletet meg tudták oldani, azaz tetszőleges pozitív számból tudtak gyököt vonni.
- **Oresmicus** (1323–1382) francia matematikus foglalkozott először a törtekitevős hatványokkal.
- **Stifel** (1487–1567) német matematikus írta le a nulladik és a negatív egész kitevőjű hatványokat.