

1.5. Feladat. Egy iskolának 510 tanulója van. Év végén a fiúk p százaléka, a lányok $(p + 3)$ százaléka lett kitűnő, így 13 fiú és 20 lány kitűnő tanuló van.

a) Határozza meg a fiúk és a lányok számát ebben az iskolában!

Megoldás. Ha összesen 510 tanuló van, abból legyen x db fiú és $510 - x$ db lány. A következőket tudjuk:

- x -nek a p %-a 13
- $(510 - x)$ -nek a $(p + 3)$ %-a 20

Ezek alapján írjuk fel az egyenletrendszerünket:

$$\left. \begin{aligned} 13 &= x \cdot \frac{p}{100} \\ 20 &= (510 - x) \cdot \frac{(p + 3)}{100} \end{aligned} \right\}$$

Házi feladat az egyenletrendszert befejezni!

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kisorsolt tanulók között 1 fiú és 2 lány lesz!

Megoldás. Ismerjük **Laplace** nevéhez fűződő **klasszikus valószínűségi mezőt**. Valószínűséget úgy számolunk, hogy a **kedvező esetek** számát elosztjuk az **összes eset** számával.

Általában az összes esetet könnyebb kiszámolni: ez jelen esetben:

$$\binom{33}{3}$$

ez azt jelenti, hogy egy 33 elemű halmaznak hány 3 elemű részhalmaza van.

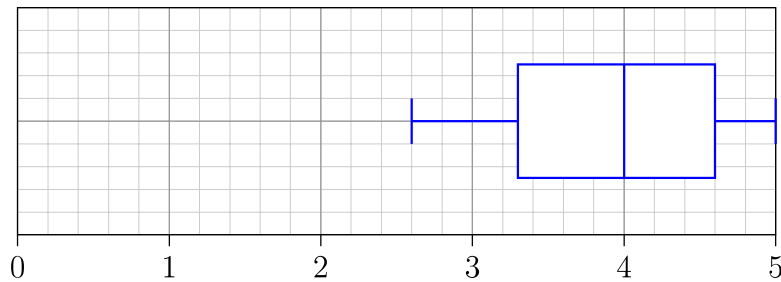
A kedvező esetek azok, amikor a 13 fiúból egy, a 20 lányból kettő van.

$$P(1f \text{ és } 2l) = \frac{\binom{13}{1} \binom{20}{2}}{\binom{33}{3}} =$$

Azért van a számlálóban szorzás, mivel egy eseményen belül történik a kiválasztás. Összeadás akkor lenne, ha külön-külön eseteket kellene nézni.

Az 510 tanuló év végi tanulmányi átlagairól (a kitűnők számán kívül) még a következő információkat tudjuk: az év végi átlagok terjedelme 2, 4; módusza 3, 8; mediánja 4, 0; átlaga 4, 2; szórása 0, 9; alsó kvartilise 3, 3; felső kvartilise 4, 6.

- c) Készítsen a tanulók év végi tanulmányi átlagairól sodrófadiagramot!



1.6. Feladat. Legyen a H alaphalmaz az egyváltozós valós függvények halmaza, M , K és A pedig a H alábbi részhalmazai:

$M = \{\text{az értelmezési tartományukon szigorúan monoton növekedő függvények}\};$

$K = \{\text{az értelmezési tartományukon konvex függvények}\};$

$A = \{\text{alulról korlátos függvények}\}.$

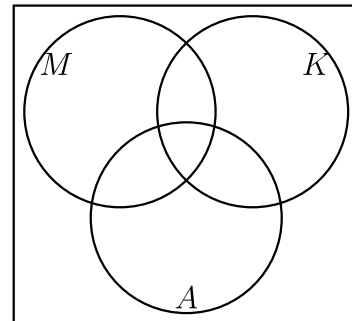
- a) Helyezze el az alábbi hozzárendelésekkel megadott függvények betűjelét az ábra megfelelő részébe!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^x$$

$$i: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$



Egy függvény akkor konvex, ha a függvény bármely két pontját összekötő szakasz a függvény felett van, tehát a függvény mosolyog.

Egy függvény akkor konkáv, ha a függvény bármely két pontját összekötő szakasz a függvény alatt van, tehát a függvény depressziós.

- b) Jelölje az ábrán satírozással a $(K \cap A) \setminus M$ halmazt, és hozzárendelési szabályával adjon meg egy olyan j függvényt, amely ebbe a halmazba tartozik!

Megoldás. A jobb oldali kétszeres metszet jelölése. Egy lehetséges megoldás: $x \mapsto x^2$

c) Határozza meg az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + bx + c$ függvény b és c paramétereinek értékét, ha tudjuk, hogy a függvénynek $x = 2$ -ben minimumhelye van, és a minimum értéke -1 .

Megoldás.

$$x \mapsto (x - 2)^2 - 1$$

Hiszen a szélsőérték koordinátái alapján szoktuk a hozzárendelési szabályt felírni.

$$(x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

Tehát: $(b; c) = (-4; 3)$

1.1. Példa. Alakítsuk teljes négyzetté az $x^2 + 8x + 5$ másodfokú polinomot:

$$x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - 16 + 5 = (x + 4)^2 - 11$$