

2.1. Feladat.

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 8)$$

Megoldás. Mielőtt a feladatnak nekiesnénk, beszéljük meg, hogy mikor kell **értelmezési tartomány**-t vizsgálni:

- algebrai tört esetén a nevező nem lehet nulla, hiszen akkor meghal egy panka :(

$$\frac{2x - 5}{x - 1} \quad x - 1 \neq 0$$

- párosadik gyök alatt nem lehet negatív szám a valós számok halmazán

$$\sqrt[2k]{x} \quad : k \in \mathbb{Z}^+ \quad x \geq 0$$

- logaritmus esetén

$$\log_a b \quad a, b > 0 \quad \text{és} \quad a \neq 1$$

- tangens esetén koszinusz nem lehet nulla

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq 90^\circ + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nulladik lépés: ÉT:

$$x - 2 > 0 \quad 2x + 8 > 0$$

$$x > 2 \quad x > -4$$

$$x > 2$$

Térjünk vissza a feladatra!

$$3 + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 8)$$

Az mondjuk nagyon zavar, hogy ott van az a 3-as. Logaritmusra írjuk át!

$$3 = \log_2 x \quad \Longleftrightarrow \quad 2^3 = x = 8$$

$$\log_2 8 + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 8)$$

Most meg az zavar, hogy bal oldalon kettő logaritmus van, vigyük őket egy logaritmusba!

Ehhez beszéljük meg a logaritmus azonosságait!

Logaritmusok összege	Logaritmusok különbsége
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ $\log_5 3 + \log_5 x = \log_5 (3x)$	$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$ $\log_6 10 - \log_6 x = \log_6 \left(\frac{10}{x} \right)$
Hatvány logaritmus	Hatvány logaritmus
$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ $\log_4 5^7 = 7 \cdot \log_4 5$	$a^{\log_a b} = b$ $5^{\log_5 7} = 7$

Illetve a más alpra való áttérés, ez órán kimaradt, de erről is szeretnék majd beszélni!

Új logaritmusra áttérés
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$

Ekkor az első azonosságot alkalmazva:

$$\log_2 8(x-2) = \log_2 (2x+8)$$

logfszm

$$8(x-2) = 2x+8$$

$$8x-16 = 2x+8$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$

Utolsó dolog: ellenőrzés.

Adott az f és a g függvény:

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = 2^{x-3} \\ g : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = 2^x - 7 \end{aligned}$$

- b) A két függvény grafikonját egy számítógépes programmal közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk. Határozza meg a két grafikon metszéspontjának koordinátáit!

Megoldás.

$$\begin{aligned} 2^{x-3} &= 2^x - 7 \\ \frac{2^x}{2^3} &= 2^x - 7 \\ 2^x &= 8 \cdot 2^x - 56 \\ 0 &= 7 \cdot 2^x - 56 \\ 56 &= 7 \cdot 2^x \\ 8 &= 2^x \\ \text{efszm} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Legyen a h függvény értelmezési tartománya az egyjegyű pozitív prímszámok halmaza, és legyen $h(x) = 2^{x-3}$.

- c) Határozza meg a h függvény inverzfüggvényének az értelmezési tartományát!

Megoldás.

2.1. Definíció. Az f függvény inverzfüggvénye f^{-1} , ha f értelmezési tartománya az f^{-1} értékkészlete, illetve az f értékkészlete az f^{-1} értelmezési tartománya.

2.2. Definíció. Az f függvény akkor invertálható, tehát létezik inverze, amennyiben

- különböző bemenetekhez mindig különböző kimeneteket rendel
- a célhalmaz minden elemét felveszi

2.1. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény alapesetben nem invertálható, hiszen több helyen is felveszi ugyanazon értéket. Ilyenkor azt csináljuk, hogy leszűkítjük az értelmezési tartományt. Ez általában az $x \geq 0$ intervallum, vagy az $0 \geq x$.

Általánosan úgy jelöljük, hogy D_f az értelmezési tartomány, R_f pedig az értékkészlet.

Ekkor $D_h = \{2; 3; 5; 7\}$, tehát $R_h = \{2^{2-3}; 2^{3-3}; 2^{5-3}; 2^{7-3}\} = \{2^{-1}; 2^0; 2^2; 2^4\} = \{\frac{1}{2}; 1; 4; 16\}$

Az inverzfüggvény definícióját kihasználva:

$$D_h = R_h^{-1}$$

$$R_h = D_h^{-1}$$

Ezek szerint a h inverzének értelmezési tartománya:

$$D_h^{-1} = \left\{ \frac{1}{2}; 1; 4; 16 \right\}$$